Ueber Combinationen von zwei Kräften,

welche zwei nicht in einer Ebene liegenden das Gleichgewicht halten.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

zur Erlangung der Doctorwürde

eingereicht

von

August Dahmen.

Rostock.
Carl Boldt's Buchdruckerei.
1874.

Meinem lieben Bruder.

Hat man eine beliebige Anzahl von Kräften, die an einem starren Punktsystem angreifen, zusammenzusetzen, so bringt man an einem willkürlich zu wählenden Punkte N des Systems für jede Kraft des Systems 2 Kräfte an, welche jener parallel und gleich sind, aber unter sich entgegengesetzte Richtung haben, sich also das Gleichgewicht halten. Für jede einzelne Kraft des Systems erhält man dann eine einfache in N angreifende, der entsprechenden Kraft des Systems gleiche, parallele und in demselben Sinne gerichtete Kraft und ein Kräftepaar, dessen Momentenarm gleich ist der Entfernung der besagten Kraft des Systems von dem Punkte N. Das ganze ursprüngliche Kräftesystem ist dann gleichwirkend mit der Resultante der sämmtlichen so erhaltenen an N angreifenden einfachen Kräfte und dem Kräftepaar, welches man durch Vereinigung der so entstehenden einzelnen Kräftepaare erhält.

Wenn nun unter den gegebenen Kräften Gleichgewicht herrschen soll, so müssen sowohl die an N angreifenden einfachen Kräfte, als auch das System von Kräftepaaren für sich im Gleichgewicht sein, d. h. die resultirende Gesammtkraft sowohl als auch das resultirende Gesammtpaar müssen verschwinden.

Wenn unter den Kräften kein Gleichgewicht stattfinden sollte, so sind drei Specialfälle denkbar; entweder sind nur die einfachen Kräfte, oder nur das System von Kräftepaaren im Gleichgewicht, oder endlich es sind weder die an N angreifenden einfachen Kräfte, noch das System von Kräftepaaren im Gleichgewicht. Im ersten Falle läßt sich offenbar das ganze gegebene Kräftesystem auf ein einzelnes Kräftepaar, im zweiten dagegen auf eine einzelne Kraft zurückführen. In dem letzten Falle ist nach dem Obigen das System reducirbar auf eine einzelne Kraft v, welche die Resultante der einfachen

Kräfte ist, und ein Kräftepaar w, welches durch Zusammensetzung aller entstandenen Kräftepaare erhalten wird.

Letzterer Fall ist der allgemeinste; doch darf hierbei v weder mit w in einer Ebene noch in einer zu w parallelen Ebene liegen, indem sonst, wie leicht erhellt, das Kräftepaar mit der Einzelkraft sich zu einer einzigen resultirenden Kraft vereinigen und somit der zweite Fall eintreten würde.

Diese bei jedem Kräftesystem demnach mögliche Zurückführung auf eine einzelne Kraft und ein Paar ist offenbar in unendlich vielfacher Weise möglich; denn bei dem angegebenen Verfahren war der Punkt N, der Angriffspunkt der Einzelkraft, ein ganz willkürlicher Punkt, und indem wir denselben also beliebig im Raume verschieben (natürlich denselben stets mit dem starren Punktsystem, an dem die ursprünglich gegebenen Kräfte wirken, starr verbunden gedacht), erhalten wir somit unendlich viele verschiedene Systeme, jedes bestehend aus einer einzigen Kraft und einem einzigen Paare, welche sämmtlich das gegebene Kräftesystem ersetzen können und daher auch natürlich unter sich alle gleichwirkend sind. Bei allen diesen äquivalenten Systemen ist aber, wie aus dem früher Gesagten hervorgeht, die Einzelkraft nach Größe und Richtung immer dieselbe, nur ihr Angriffspunkt wechselt, während das zugehörige Paar sowohl seine Ebene als auch sein Moment ändert. Unter diesen unzähligen Verbindungen einer Einzelkraft und eines Paares, welche unter sich und dem gegebenen Kräftesystem äquivalent sind, gibt es eine einzige bestimmte, bei der die Ebene des Paares auf der Richtung der Einzelkraft senkrecht steht und zugleich das Moment des Paares einen Minimalwerth annimmt; die fest bestimmte Grade, in welche in diesem Falle die Einzelkraft fällt, heißt die Centralachse des gegebenen Kräftesystems.

Für das beliebige ursprüngliche Kräftesystem wollen wir nun ein solches nehmen, welches blos aus zwei Kräften besteht, deren Richtungen jedoch nicht in einer Ebene liegen, die also weder einander parallel sein, noch sich schneiden können. Ein solches System von zwei windschiefgerichteten Kräften läßt sich

also dem Gesagten gemäß auf unendlich vielfache Weise ersetzen durch eine Combination eines Kräftepaares und einer Einzelkraft, deren Richtung die Ebene des Paares schneidet.

Es ist dieses auch sofort direct einzusehen. Die beiden Kräfte seien v und v'. Man lege etwa durch einen beliebigen Punkt in der Richtung von v' zwei der v gleiche parallele und einander entgegengesetzte, sich selbst also das Gleichgewicht haltende Kräfte, so bildet die eine — v mit v ein Paar, die andere v läßt sich mit v' zu einer Kraft r vereinigen, welche die Ebene des Paares schneidet. Hierdurch ist die geforderte Reduction schon bewerkstelligt. Da der auf v' angenommene Punkt ein willkürlicher ist, so ist die Umwandlung in unendlich vielen Arten möglich. Daß die beiden gegebenen Kräfte sich nicht auf eine einzelne Kraft oder ein einziges Paar zurückführen lassen, ist hieraus ersichtlich, indem dann die Kraft r entweder in die Ebene des Kräftepaars hineinfallen oder verschwinden müßte, was beides offenbar nicht stattfinden kann. Es ist selbstverständlich, daß man die Reduction der beiden gegebenen Kräfte auf eine Einzelkraft und ein einzelnes Paar auch in der obigen allgemeinen Weise ausführen kann.

Ein System, welches aus einer einzelnen Kraft und einem Paar besteht, dessen Ebene von der Richtung der erstern geschnitten wird, kann nun stets ersetzt werden durch das System zweier windschief gerichteten Kräfte. Denn da man, ohne die Wirkung eines Kräftepaars zu ändern, für dasselbe jedes andere setzen darf, dessen Ebene der Ebene des ursprünglich vorhandenen parallel ist, dessen Moment dem Moment des ursprünglichen gleich ist, und welches mit jenem in demselben Sinne wirkt, so ersetze man das Paar des vorliegenden Systems durch irgend ein anderes, dessen eine Kraft die Einzelkraft schneidet, und welches den vorhin aufgezählten Bedingungen genügt. Die eine Kraft des Paares und die gegebene Einzelkraft vereinigen sich dann zu einer neuen Kraft, welche, wie leicht ersichtlich, mit der zweiten Kraft des Paares ein System von zwei windschief gerichteten Kräften bildet, die sich demnach für die gegebene Combination einer Einzelkraft und eines Paares setzen lassen.

Diese Umwandlung des gegebenen Systems in ein System zweier windschief gerichteten Kräfte ist offenbar auf unendlich vielfache Weise ausführbar, da das Paar, welches wir für das gegebene eingesetzt haben, sich in unendlich vielfacher Weise wählen läßt; man kann zu diesem Zwecke in einem ganz beliebigen Punkte der Richtung der Einzelkraft nach einer ganz beliebigen Richtung eine Kraft von beliebiger Intensität anbringen und parallel mit dieser in der durch jenen Punkt mit der Ebene des ursprünglichen Paares gelegten parallelen Ebene eine zweite ihr gleiche und in entgegengesetztem Sinne wirkende Kraft in solcher Entfernung von ihr und an der Seite anbringen, daß das Moment des so entstehenden neuen Paares sowie der Sinn, in dem es dreht, dem Momente und dem Sinne des ursprünglichen Paares gleichkommt.

Da nun nach dem Frühern jedes beliebige Kräftesystem sich durch unendlich viele Combinationen aus einer Einzelkraft und einem Paare ersetzen läßt und sich nach dem eben Gesagten jede solche Combination wiederum auf unendlich viele Weisen durch ein System von zwei windschief gerichteten Kräften ersetzen läßt, so ist also auch ersichtlich, daß sich für jedes beliebige Kräftesystem unendlich viele Combinationen von zwei windschief gerichteten Kräften finden lassen, die alle mit dem gegebenen System sowie unter sich äquivalent sind. Dies gilt natürlich auch, wenn das ursprüngliche System selbst eine Combination von zwei windschief gerichteten Kräften ist; für dasselbe lassen sich unendlich viele einander äquivalente Combinationen derselben Art setzen.

Dieses Resultat kann man auch direct einsehen, beispielsweise durch folgende Betrachtung. Auf beiden gegebenen Kräften v und v' nehme man irgend zwei Punkte an und bringe an denselben in der Richtung der Verbindungslinie beider zwei einander entgegengesetzte gleiche Kräfte an, die sich mithin unter sich aufheben; dieselben setzen sich mit den beiden gegebenen Kräften zu zwei neuen windschief gerichteten Kräften zusammen, die den erstern äquivalent sein müssen; daß diese Construction sich auf unzählig viele Arten ausführen läßt, also die Zahl der Combinationen von zwei windschief gerichteten

Kräften, die den gegebenen gleichwirkend sind, unendlich groß ist, ist ersichtlich. Denn es können nicht nur alle beliebigen Punkte der gegebenen Kräfte verbunden und an ihnen zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Kräfte angebracht, sondern es kann auch die Größe der beiden gleichen Kräfte nach Willkür geändert werden.

Schreiten wir jetzt zu einer genauern Untersuchung derjenigen Combinationen zweier windschief gerichteten Kräfte, welche den beiden gegebenen das Gleichgewicht zu halten vermögen. Das einfachste System derart wird von denjenigen beiden Kräften gebildet, welche mit den gegebenen die Angriffspunkte gemeinsam haben und ihnen entgegengesetzt gleich sind. Sucht man nun für dieses letztere System nach der vorher angeführten Methode irgend ein äquivalentes, so ist dieses System auch ein solches, welches den beiden gegebenen Kräften das Gleichgewicht hält. Natürlich kann man ebenso für das System der zwei gegebenen Kräfte nach dem Frühern irgend welche aequivalente Systeme von zwei windschief gerichteten Kräften aufsuchen; nimmt man dann für die beiden gefundenen Kräfte eines solchen Systems die entgegengesetzt gleichen, so hat man allemal ein System von zwei nicht in einer Ebene liegenden Kräften, welche den beiden gegebenen das Gleichgewicht halten.

Zu demselben Ziele gelangt man auch auf analytischem Wege.

Seien V und V' die beiden gegebenen Kräfte, α, β, γ und α', β', γ' die Richtungswinkel derselben gegen die drei rechtwinkligen Coordinaten-Achsen; x, y, z und x', y', z' ihre Angriffspunkte. Für die Summe der Componenten der Kräfte nach den drei Achsen, sowie die Summe der Drehungsmomente derselben um die drei Achsen wollen wir zur Abkürzung A, B, C, resp. L, M, N setzen. Es ist also:

$$A = V\cos\alpha + V'\cos\alpha'$$
$$B = V\cos\beta + V'\cos\beta'$$
$$C = V\cos\gamma + V'\cos\gamma'$$

$$L = y\,V\cos\gamma - z\,V\cos\beta + y'\,V'\cos\gamma' - z'\,V'\cos\beta'$$
$$M = z\,V\cos\alpha - x\,V\cos\gamma + z'\,V'\cos\alpha' - x'\,V'\cos\gamma'$$
$$N = x\,V\cos\beta - y\,V\cos\alpha + x'\,V'\cos\beta' - y'\,V'\cos\alpha'.$$

Es seien ferner $X_1\ Y_1\ Z_1$, $X_2\ Y_2\ Z_2$ die Componenten, $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$ die Coordinaten der Angriffspunkte zweier anderen Kräfte. Dann sind die Bedingungen dafür, daß die letzteren den ersteren Kräften das Gleichgewicht halten:

$$X_1 + X_2 + A = 0$$
$$Y_1 + Y_2 + B = 0$$
$$Z_1 + Z_2 + C = 0$$
$$Z_1 y_1 - Y_1 z_1 + Z_2 y_2 - Y_2 z_2 + L = 0$$
$$X_1 z_1 - Z_1 x_1 + X_2 z_2 - Z_2 x_2 + M = 0$$
$$Y_1 x_1 - X_1 y_1 + Y_2 x_2 - X_2 y_2 + N = 0$$

Dieses sind 6 lineare Gleichungen zwischen 12 Unbekannten (den sechs Componenten und den sechs Coordinaten der Angriffspunkte der gesuchten neuen Kräfte). Es bleiben daher sechs dieser Unbekannten willkürlich annehmbar, während sich dann die sechs Anderen aus diesen Gleichungen eindeutig bestimmen lassen, und es ist daher auch so nachgewiesen, daß sich unendlich viele Combinationen von zwei windschief gerichteten Kräften angeben lassen, welche den beiden gegebenen das Gleichgewicht halten. Die Form dieser Gleichungen zeigt aber weiter, daß doch nicht beliebige sechs der Unbekannten willkürlich angenommen werden können. Unter diesen dürfen nämlich nicht solche gewählt werden, zwischen denen allein schon vermöge der Bedingungsgleichungen Relationen stattfinden, z. B. nicht X_1 und X_2 zugleich, weil durch die erste der sechs Gleichungen:

$$X_1 + X_2 = -A$$

mit der einen der Unbekannten die andere schon bestimmt ist. Dasselbe gilt von den übrigen Componenten.

Ebenso dürfen auch die sechs Coordinaten der Angriffspunkte $x_1\ y_1\ z_1$ und $x_2\ y_2\ z_2$ nicht alle sechs beliebig angenommen werden, weil zwischen diesen sechs Größen auch eine Gleichung besteht. Die Herleitung und Erörterung dieser Gleichung werden wir aber erst späterhin vornehmen.

Nachdem nun auf diese Weise gezeigt worden ist, daß es unendlich viele Combinationen von zwei Kräften gibt, die zwei Kräften, die weder parallel sind, noch sich schneiden, das Gleichgewicht halten können, wollen wir dazu übergehen, eine merkwürdige geometrische Eigenschaft zu entwickeln, welche für alle diese Combinationen zweier windschief gerichteten Kräfte besteht, und zwar werden wir diese Relation auf algebraischem Wege zu finden suchen.

Je zwei windschief gerichtete Kräfte, welche in der gewöhnlichen Weise durch gerade Linien dargestellt sind, können wir als die gegenüberstehenden Kanten eines Tetraeders auffassen, das erhalten wird, wenn wir die beiden Endpunkte einer jeden Kante mit den beiden Endpunkten der gegenüberliegenden Kante verbinden. Es läßt sich nun zeigen, daß das Tetraeder, welches in dieser Weise durch irgend zwei Kräfte bestimmt wird, die den gegebenen nicht in einer Ebene liegenden das Gleichgewicht halten, immer denselben Inhalt hat, denselben nämlich wie das Tetraeder, welches die zwei gegebenen Kräfte bestimmen.

Der Inhalt T des Tetraeders, dessen Eckpunkte folgende rechtwinklige Coordinaten haben: $x\ y\ z$, $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$, $x_3\ y_3\ z_3$, drückt sich bekanntlich folgendermaßen aus:

$$T = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Seien nun $X_1\ Y_1\ Z_1$, $X_2\ Y_2\ Z_2$ die Componenten zweier beliebigen Kräfte P_1 und P_2, welche dem ursprünglichen System das Gleichgewicht halten, und seien $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$ die Angriffspunkte der beiden Kräfte, so sind die rechtwinkligen Coordinaten der Ecken des in der oben angegebenen Weise gebildeten Tetraeders $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$, $x_1 + X_1$, $y_1 + Y_1$, $z_1 + Z_1$, $x_2 + X_2$, $y_2 + Y_2$, $z_2 + Z_2$; und der Inhalt des aus den Kräften gebildeten Tetraeders also ist:

$$T = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1 + X_1 & y_1 + Y_1 & z_1 + Z_1 & 1 \\ x_2 + X_2 & y_2 + Y_2 & z_2 + Z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Seien nun wieder wie vorhin A, B, C die drei Summen der Componenten der zwei gegebenen Kräfte nach den Achsen, L, M, N die Summen der Drehungsmomente derselben um die drei Achsen, so sind die Bedingungen, denen die Componenten und die Coordinaten der Angriffspunkte genügen müssen, nach dem Frühern folgende:

$$\begin{gathered} X_1 + X_2 + A = 0 \\ Y_1 + Y_2 + B = 0 \\ Z_1 + Z_2 + C = 0 \\ Z_1\, y_1 - Y_1\, z_1 + Z_2\, y_2 - Y_2\, z_2 + L = 0 \\ X_1\, z_1 - Z_1\, x_1 + X_2\, z_2 - Z_2\, x_2 + M = 0 \\ Y_1\, x_1 - X_1\, y_1 + Y_2\, x_2 - X_2\, y_2 + N = 0 \end{gathered}$$

Setzen wir der Abkürzung wegen: $-A = \mathfrak{A}$, $-B = \mathfrak{B}$, $-C = \mathfrak{C}$, $-L = \mathfrak{L}$, $-M = \mathfrak{M}$, $-N = \mathfrak{N}$, so können wir diese Gleichungen für den jetzigen Zweck bequemer folgendermaßen schreiben, wo also jetzt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ gegebene Constanten sind:

$$\begin{gathered} X_1 + X_2 = \mathfrak{A} \\ Y_1 + Y_2 = \mathfrak{B} \\ Z_1 + Z_2 = \mathfrak{C} \\ Z_1\, y_1 - Y_1\, z_1 + Z_2\, y_2 - Y_2\, z_2 = \mathfrak{L} \\ X_1\, z_1 - Z_1\, x_1 + X_2\, z_2 - Z_2\, x_2 = \mathfrak{M} \\ Y_1\, x_1 - X_1\, y_1 + Y_2\, x_2 - X_2\, y_2 = \mathfrak{N} \end{gathered}$$

Die drei letzten Bedingungsgleichungen können nun in Form von Determinanten auch so geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \mathfrak{L}$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ Z_1 & X_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} = \mathfrak{M}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \mathfrak{N}$$

Wie nun vorhin entwickelt wurde, ist der Inhalt des Tetraeders T, welches durch die beiden Kräfte P_1 und P_2 dargestellt wird, und dieselben zu gegenüberliegenden Kanten hat:

$$T = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1 + X_1 & y_1 + Y_1 & z_1 + Z_1 & 1 \\ x_2 + X_2 & y_2 + Y_2 & z_2 + Z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Nach der Subtraction der ersten und zweiten Zeile resp. von der dritten und vierten folgt:

$$T = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 0 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Zerlegen wir jetzt die Determinante nach den Elementen der letzten Vertikal-Reihe, so fallen von den vier Unterdeterminanten zwei aus, weil sie mit den beiden verschwindenden Elementen multiplicirt sind. Es wird, wenn wir mit dem Nenner 6 heraufmultipliciren:

$$\pm 6\,T = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Addiren wir in der ersten Determinante die dritte Zeile zu der zweiten, in der zweiten Determinante die zweite zu der dritten, so folgt:

$$\pm 6\,T = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ X_1 + X_2 & Y_1 + Y_2 & Z_1 + Z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_1 + X_2 & Y_1 + Y_2 & Z_1 + Z_2 \end{vmatrix}$$

oder unter Berücksichtigung der obigen Bedingungsgleichungen:

$$\pm 6\,T = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \end{vmatrix}$$

Entwickeln wir die beiden Determinanten nach den Elementen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ der zweiten resp. dritten Horizontal-Reihe, so kommt:

$$\pm 6\,T = -\mathfrak{A}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \mathfrak{B}\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \mathfrak{C}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

$$-\mathfrak{A}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} + \mathfrak{B}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ X_1 & Z_1 \end{vmatrix} - \mathfrak{C}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}$$

Nach einfacher Vereinigung und Umformung einzelner Determinanten ergiebt sich:

$$\mp 6\,T = \mathfrak{A}\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ \mathfrak{B}\left\{\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ Z_1 & X_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$+ \mathfrak{C}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Hieraus folgt nach den oben angeführten Bedingungsgleichungen:

$$\mp 6\,T = \mathfrak{A}\,\mathfrak{L} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{M} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{N}$$

oder wenn wir mit 6 wieder dividiren:

$$T = \pm\,\frac{1}{6}\left\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{L} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{M} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{N}\right\}.$$

In diesem Ausdrucke kommen nur constante Größen vor, welche sich auf die beiden gegebenen Kräfte beziehen. Der Inhalt des fraglichen Tetraeders ist sonach constant für alle die unendlich vielen Combinationen von je zwei windschief gerichteten Kräften, welche den gegebenen das Gleichgewicht zu halten vermögen. Von der einen dieser Combinationen zur andern wechselt natürlich die Lage und Länge der geraden Linien, welche die beiden Kräfte darstellen, aber der Inhalt des aus ihnen gebildeten Tetraeders bleibt stets derselbe.

Zu den Combinationen zweier Kräfte, welche den beiden gegebenen das Gleichgewicht zu halten im Stande sind, gehören nun vor Allem auch die beiden denselben direct entgegengesetzt gerichteten und gleichen Kräfte. Nimmt man die Endpunkte der Geraden, welche die gegebenen Kräfte darstellen,

zu Angriffspunkten dieser entgegengesetzt gleichen Kräfte, dann fällt das Tetraeder dieser ausgezeichneten Combination mit dem Tetraeder der gegebenen Kräfte vollständig zusammen, und da alle möglichen Combinationen stets ein Tetraeder von constantem Inhalt liefern, so erhellt also, daß der Inhalt des Tetraeders, welches irgend eine Combination von zwei windschief gerichteten Kräften liefert, die zwei gegebenen Kräften das Gleichgewicht halten, stets dem Inhalte des Tetraeders der beiden gegebenen Kräfte gleich sein muß.

Da ferner alle Combinationen von zwei Kräften, welche den beiden gegebenen das Gleichgewicht halten, unter sich gleichwirkend sind, so kann der gefundene Satz auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

> Für alle möglichen Combinationen von zwei windschief gerichteten Kräften, welche einander ersetzen können oder einander äquivalent sind, besitzt das durch die beiden Kräfte einer solchen Combination gebildete Tetraeder immer denselben Inhalt. —

Aus den früher schon aufgestellten Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zwischen den zwei gegebenen windschief gerichteten Kräften und irgend zwei anderen, welche denselben das Gleichgewicht halten, ergeben sich außer dem bereits gefundenen Satze, daß die Tetraeder, von welchen dieselben gegenüberliegende Kanten sind, gleichen Inhalt haben, noch einige andere bemerkenswerthe Relationen. Die besagten Bedingungsgleichungen waren dem Früheren gemäß unter Beibehaltung der damals angenommenen Bezeichnungen:

$$X_1 + X_2 = \mathfrak{A},\ Y_1 + Y_2 = \mathfrak{B},\ Z_1 + Z_2 = \mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{L} = y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2$$
$$\mathfrak{M} = z_1 X_1 - x_1 Z_1 + z_2 X_2 - x_2 Z_2$$
$$\mathfrak{N} = x_1 Y_1 - y_1 X_1 + x_2 Y_2 - y_2 X_2$$

Hierbei sind wie vorhin $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ gegebene Constanten. Es wurde bereits früher darauf aufmerksam gemacht, daß man in diesen sechs Gleichungen mit zwölf Unbekannten die Coordinaten der Angriffspunkte der den beiden gegebenen das Gleichgewicht haltenden Kräfte nicht willkürlich annehmen

dürfe, da zwischen denselben eine Gleichung bestehe. Diese wollen wir jetzt ableiten.

Man multiplicire die drei letzten Gleichungen einmal bezüglich mit x_1 y_1 z_1, ein andermal mit x_2 y_2 z_2 und addire jedesmal die entstandenen Ausdrücke; dann kommt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}x_1 + \mathfrak{M}y_1 + \mathfrak{N}z_1 = & \; X_2 (y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ & + Y_2 (z_1 x_2 - z_2 x_1) \\ & + Z_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ \mathfrak{L}x_2 + \mathfrak{M}y_2 + \mathfrak{N}z_2 = & \; X_1 (y_2 z_1 - y_1 z_2) \\ & + Y_1 (z_2 x_1 - z_1 x_2) \\ & + Z_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) \end{aligned}$$

Nach der Subtraction der beiden Gleichungen ergibt sich unter Berücksichtigung der drei ersten Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} (x_2 - x_1) + \mathfrak{M} (y_2 - y_1) + \mathfrak{N} (z_2 - z_1) = & \\ \mathfrak{A} (y_2 z_1 - y_1 z_2) & \\ + \mathfrak{B} (z_2 x_1 - z_1 x_2) & \\ + \mathfrak{C} (x_2 y_1 - x_1 y_2) & \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung, welche neben den gegebenen Constanten nur die fraglichen sechs Coordinaten enthält, läßt sich erkennen, daß diese Coordinaten nicht unabhängig von einander sind, so daß also höchstens fünf derselben willkürlich angenommen werden dürfen.

Eine andere Folgerung kann noch aus dieser Gleichung gezogen werden; es ergibt sich nämlich aus derselben, daß, wenn die eine Kraft X_1 Y_1 Z_1 durch einen gegebenen Punkt a_1 b_1 c_1 geht, die andere in einer damit gegebenen den Punkt a_1 b_1 c_1 enthaltenden Ebene liegt.

Nimmt man nämlich für x_1 y_1 z_1 die Werthe a_1 b_1 c_1 willkürlich an, so verwandelt sich die vorige Gleichung in eine lineare Gleichung mit den drei unbekannten Coordinaten x_2 y_2 z_2 und zeigt also, daß dann der Angriffspunkt der zweiten Kraft stets in der Ebene liegen muß, deren Gleichung folgende ist, unter x y z die laufenden Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben verstanden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} (x - a_1) + \mathfrak{M} (y - b_1) + \mathfrak{N} (z - c_1) = & \\ \mathfrak{A} (y c_1 - z b_1) & \end{aligned}$$

$$+ \mathfrak{B}\,(z\,a_1 - x\,c_1)$$
$$+ \mathfrak{C}\,(x\,b_1 - y\,a_1)$$

Da nun aber jeder Punkt in der Richtung der zweiten Kraft als ihr Angriffspunkt betrachtet werden kann, so folgt sofort, daß die Richtung dieser Kraft ganz in die durch obige Gleichung bestimmte Ebene hineinfallen muß. Läßt man also die eine der beiden Kräfte, wodurch den beiden gegebenen Kräften das Gleichgewicht gehalten wird, durch einen beliebigen Punkt a_1 b_1 c_1 gehen, so muß die zweite jedesmal in einer durch diesen Punkt bestimmten Ebene liegen. Es ist ferner ersichtlich, daß diese Ebene auch durch den Punkt a_1 b_1 c_1 geht, da, wenn man in der Gleichung für x y z bezüglich a_1 b_1 c_1 einsetzt, dieselbe identisch wird.

Eine einfache Construction macht das zuletzt Gefundene auch einleuchtend.

Hat man zwei gegebene Kräfte p_1 und p_2, deren Richtungen nicht in einer Ebene liegen, und nimmt man die Richtung q an, welche mit der einen der gegebenen Kräfte p_1 in einer Ebene E_1 liegt und daher im Allgemeinen p_1 in einem Punkte schneidet, so ist es immer möglich, die zwei gegebenen Kräfte in zwei gleichwirkende q_1 und q_2 zu verwandeln, von denen die eine die Richtung q hat, oder, indem man die beiden gleichwirkenden Kräfte entgegengesetzt nimmt, ist es möglich, zwei Kräfte zu finden, die den ursprünglich gegebenen p_1 und p_2 das Gleichgewicht halten.

Sollen nämlich p_1, p_2 und q_1, q_2 gleichwirkend sein, so müssen es auch p_1, $-q_1$ und q_2, $-p_2$ sein, wo $-q_1$, $-p_2$ die mit q_1, p_2 gleichen, aber gerade entgegengesetzt gerichteten Kräfte sind. Es ist zunächst einleuchtend, daß, wenn p_1, p_2 äquivalent mit q_1, q_2 sein sollen, die vier Kräfte p_1, p_2, $-q_1$, $-q_2$ im Gleichgewicht sind, oder etwa die Combination der beiden Kräfte p_1, $-q_1$ durch die Combination der beiden Kräfte p_2, $-q_2$ in's Gleichgewicht gebracht werden kann. Daraus ergibt sich dann unmittelbar, daß die Combination p_1, $-q_1$ mit der andern $-p_2$, q_2 äquivalent ist.

Nun haben die Kräfte p_1, $-q_1$ als Kräfte, die sich in der Ebene E_1 in dem Puncte A_1 schneiden, eine Resultante r, welche

durch A_1 geht und in der Ebene E_1 liegt. Diese Resultante r muß also auch den beiden Kräften $-p_2$, q_2, welche, wie eben bewiesen wurde, mit p_1, $-q_1$ äquivalent sind, zukommen; also muß q_2 die Resultante von r und p_2 sein. Da nun zwei Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen, nicht auf eine einzige Kraft reducirt werden können, so müssen p_2 und r, sowie auch q_2 in einer Ebene E_2 enthalten sein und sich darin im Allgemeinen in einem Puncte A_2 schneiden. Hiernach ist die Richtung von r bestimmt als die Durchschnittslinie der Ebene E_1, in welcher p_1 und q_1 wirken, mit der durch p_2 und den Schnittpunkt A_1 von p_1 und q_1 zu legenden Ebene E_2. Da nun ferner von den Kräften p_1, $-q_1$, $-r$, welche im Gleichgewicht sind, die Richtungen, von der ersten derselben p_1 auch die Intensität gegeben sind, so lassen sich auch von q_1 und r die Intensitäten nach dem Kräfteparallelogramm bestimmen. Hieraus folgt dann sofort die Richtung und Intensität von q_2 als von einer Kraft, die mit $-r$, $-p_2$ im Gleichgewicht ist.

Aus dem Bisherigen lassen sich nun folgende Folgerungen ziehen:

Kennt man von der Richtung der Kraft q_1 nur den Punkt A_1, in welchem sie p_1 schneiden soll, so ist von der Kraft q_2 nur die Ebene E_2 bekannt, in welcher sie mit der Kraft p_2 liegt. Die Ebene E_2 ist die durch p_2 und den Punkt A_1 gelegte Ebene. Ist dagegen für die Kraft q_1 nur die Ebene E_1 gegeben, in welcher sie mit p_1 liegen soll, so ist von der Kraft, q_2 nur der Punkt A_2 bekannt, in welchem sie p_2 schneiden muß. Dieser Punkt A_2 ist der Durchschnittspunkt der Ebene E_1 mit der Kraft p_2.

Wenn also von irgend zwei Kräften, die zwei windschief gerichteten Kräfte p_1 und p_2 gleichwirkend sind, die eine p_1 in einem Punkte A_1 schneidet, so liegt die andere in der durch A_1 und die Kraft p_2 bestimmten Ebene; wenn aber die eine der Kräfte mit p_1 in einer Ebene E_1 liegt, so geht die andere durch den Durchschnittspunkt der Ebene E_1 und der Kraft p_2.

Auch in dem Falle, daß die gegebene Richtung von q nicht mit p_1 in einer Ebene liegt, können die Intensität von q_1 und die Richtung und Intensität von q_2 so bestimmt werden,

daß q_1 und q_2 mit p_1 und p_2 gleichwirkend sind. Zieht man nämlich eine gerade Linie s, welche die Kräfte p_1 und q_1 zugleich schneidet, so lassen sich nach dem Vorhergehenden p_1 und p_2 in zwei Kräfte s_1 und s_2 verwandeln, von denen die eine s_1 die Richtung s hat. Auf dieselbe Weise kann man dann auch aus s_1 und s_2 die mit ihnen, folglich auch mit p_1 und p_2, gleichwirkenden Kräfte q_1 und q_2 finden.

Zu dem Resultate, daß, wenn die Richtungen der einen Kraft stets in einer Ebene genommen werden, die Richtungen der zugehörigen zweiten Kraft alle durch einen Punkt gehen müssen, führt auch folgende geometrische Betrachtung.

Bemerken wir zunächst, daß, wenn man zwei äquivalente Combinationen von je zwei windschief gerichteten Kräften hat (p, q und r, s), und die beiden ersten Kräfte p und r sich schneiden, sich auch die beiden anderen Kräfte q und s schneiden müssen. Denkt man sich nämlich statt des einen Paares die entgegengesetzt gleichen Kräfte genommen, etwa — r und — s, so muß nothwendig zwischen p, q, — r, — s Gleichgewicht herrschen. Die Kräfte p und — r schneiden sich nun nach der Annahme, geben also eine Mittelkraft t, weshalb auch Gleichgewicht bestehen muß zwischen den Kräften t, q, — s. Schnitten sich nun die beiden letztern nicht, wären sie also windschief gerichtet, so könnten sie durch eine Einzelkraft und ein Paar ersetzt werden, dessen Ebene von jener Einzelkraft getroffen wird. Das letztere System (der Einzelkraft und des Kräftepaares) kann aber nie durch eine einzige Kraft t im Gleichgewicht gehalten werden. Mithin können die beiden Kräfte q und — s und also auch q und s nicht, wie angenommen, windschief zu einander sein, müssen sich also schneiden, wie behauptet wurde.

Man denke sich nun eine beliebige Ebene M, in welche für alle zu construirenden Kräftecombinationen die Richtung der einen Kraft immer hineingelegt werden soll; es ist dann zu beweisen, daß die Richtungen der zugehörigen zweiten Kraft stets durch einen und denselben Punkt gehen müssen. Zu diesem Zwecke nehme man in der Ebene M zwei beliebige Richtungen p und p′ für die erste Kraft, die sich also stets schneiden, weil sie in derselben Ebene enthalten sind; dann müssen sich nach dem

obigen Hülfssatz auch die zugehörigen Richtungen q und q' der zweiten Kraft in einem Punkte o schneiden. Zieht man jetzt durch o eine beliebige dritte Gerade q_1 als Richtung der zweiten Kraft, welche mit q und q' nicht in einer Ebene liegt, so muß nach dem früher algebraisch bewiesenen Hauptsatze die zugehörige Richtung der ersten Kraft p_1 mit p und p' in einer Ebene, d. h. in der Ebene M liegen. Denkt man sich nun ferner eine beliebige Gerade P in der Ebene M als Richtung der ersten Kraft, welche die drei Geraden p, p', p_1 natürlich schneidet, so muß die zugehörige Richtung Q der zweiten Kraft nach dem obigen Hülfssatz auch die drei Geraden q, q', q_1 schneiden, was, da diese drei Geraden sich in einem Punkte o schneiden, aber nicht in einer Ebene liegen, nur möglich ist, wenn auch Q durch den Punkt o geht.

Das sich hieraus ergebende Resultat läßt sich folgendermaßen ausdrücken.

Das System von Paaren von je zwei windschief gerichteten Kräften, die zwei gegebenen Kräften äquivalent sind oder ihnen das Gleichgewicht halten, ist derart, daß dem Angriffspunkt der einen Kraft eines solchen Paares eine Ebene entspricht, in welcher die andere Kraft liegt, und allen Ebenen, welche durch die eine gehen, Punkte in der Richtung der andern Kraft. In dieser Beziehung entspricht daher jedem Punkte eine durch ihn gehende Ebene und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt. Wenn demnach von den zwei Kräften einer solchen Combination die Richtung der einen eine gegebene ist, so ist damit auch die Richtung der anderen eine bestimmte. Sie ist nämlich die Durchschnittslinie zweier Ebenen, welche zu irgend zwei Punkten der erstern Richtung gehören, oder auch die gerade Linie zwischen zwei Punkten, welche durch irgend zwei in der erstern Richtung sich schneidende Ebenen bestimmt sind.

Sowie also jedem Punkte eine Ebene und jeder Ebene ein Punkt entspricht, so hat auch jede Gerade eine ihr entsprechende Gerade. —